

AA-1184
(005) B.Sc. (Part-II)
Term End Examination, 2021-22
Mathematics (Paper-I)

Time : 3 hrs.]

[Maximum Marks : 50

नोट — सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्नों के अंक उनके दाहिनी ओर अंकित हैं ।

*Attempt all five questions. The figures in the right-hand margin indicate marks.***[इकाई-1 / Unit-I]**

1. (क) सिद्ध कीजिए कि यदि $|x| < 1$ तब अनुक्रम $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ अभिसारी है। 5

Show that if $|x| < 1$ then the sequence $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent.

- (ख) सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x \rightarrow \infty} U_n = 0$ श्रेणी $\sum U_n$ की अभिसारिता के लिये आवश्यक प्रतिबंध है परंतु पर्याप्त नहीं है।

Show that, for the convergence of the series $\sum U_n$, it is necessary but not sufficient that $\lim_{x \rightarrow \infty} U_n = 0$ **अथवा/OR**

- (क) श्रेणी $1 + \frac{2x}{2} + \frac{3^2 x^2}{3} + \frac{4^3 x^3}{4} + \dots x > 0$ के अभिसारी या अपसारी की परीक्षण कीजिए। 5

Test the convergence or divergence of the series $1 + \frac{2x}{2} + \frac{3^2 x^2}{3} + \frac{4^3 x^3}{4} + \dots x > 0$

- (ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है। 5

Show that every Cauchy sequence is bounded.

[इकाई-2 / Unit-II]

2. (क) मध्यवर्ती मान प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।
State and prove the intermediate value theorem.
- (ख) यदि f और g क्रमशः $8(x_0)$ और x_0 पर अवकलनीय है तो सिद्ध कीजिए कि $f \circ g$, x_0 पर अवकलनीय है तथा
 $(f \circ g)'(x_0) = f' [g(x_0)] \cdot g'(x_0)$
 If f and g are differentiable at $g(x_0)$ and x_0 respectively then show that $f \circ g$ is differentiable at x_0 and
 $(f \circ g)'(x_0) = f' [g(x_0)] \cdot g'(x_0)$

अथवा/OR

- (क) सिद्ध कीजिए कि फलन जो परिबद्ध एवं बंद अंतराल $[a, b]$ में संतत है, अंतराल $[a, b]$ में एक समान सतत होता है।
Show that a function which is continuous in bounded and closed interval $[a, b]$ is uniformly continuous in $[a, b]$

- (ख) बिन्दुओं $x = 0, 1$ पर फलन $f(x) = |x| + |x-1|$ के सातत्यता की जांच कीजिए।

Test the continuity of the function $f(x) = |x| + |x-1|$ at $x = 0, 1$ **[इकाई-3 / Unit-III]**

3. (क) $\varepsilon - \delta$ तकनीक से सिद्ध कीजिए कि : $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x^2 + 2y = 3$

By using $\varepsilon - \delta$ technique prove that : $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x^2 + 2y = 3$

(ख) यदि $\theta = t^n e^{-r^2/4t}$ तब n के किस मान के लिए $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}$

If $\theta = t^n e^{-r^2/4t}$ then for what value of n : $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}$

अथवा/OR

(क) समीकरण $\sin^2 z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$ को $\tan z = e^x$ प्रतिस्थापन द्वारा रूपांतरित कीजिए।

Transform the equation $\sin^2 z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$ by putting $\tan z = e^x$.

(ख) सिद्ध कीजिए कि फलन $u = 3x + 2y - z$, $v = x - 2y + z$, $w = x(x + 2y - z)$ स्वतंत्र नहीं है तथा उनके बीच संबंध ज्ञात कीजिए।

Prove that the function $u = 3x + 2y - z$, $v = x - 2y + z$, $w = x(x + 2y - z)$ are not independent and find a relation between them.

[इकाई-4 / Unit-IV]

4. (क) सरल रेखाओं $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का अन्वलोप ज्ञात कीजिए जबकि $a^2 + b^2 = c^2$ जहाँ c नियतांक है।

Find the envelope of the straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ when $a^2 + b^2 = c^2$ and c is constant.

(ख) $U = x^2 + y^2 + z^2$ का उच्चिष्ठ और निम्ननिष्ठ ज्ञात कीजिए जबकि $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ तथा $lx + my + nz = 0$
Find the maxima and minima of $U = x^2 + y^2 + z^2$ subject to the conditions $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$

अथवा/OR

(क) $U = x^2 + y^2 + z^2$ का उच्चिष्ठ और निम्ननिष्ठ ज्ञात कीजिए जबकि $ax + by + cz^2 = 1$ तथा $a^2x + b^2y + c^2z = 1$
Find the maxima and minima of $U = x^2 + y^2 + z^2$ subject to the conditions $ax + by + cz^2 = 1$, $a^2x + b^2y + c^2z = 1$

(ख) रेखाओं के परिवार $ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$ का अन्वलोप ज्ञात कीजिए जहाँ α प्राचल है।

Find the envelop of the family of lines $ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$ where α is parameter.

[इकाई-5 / Unit-V]

5. (क) सिद्ध कीजिए : $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$ Show that : $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$

(ख) $\iint_R xy(x+y) dx dy$ का मूल्यांकन कीजिए जहाँ R , परवलय $y = x^2$ तथा रेखा $y = x$ के बीच का क्षेत्र है।

Evaluate $\iint_R xy(x+y) dx dy$ over the area between the parabola $y = x^2$ and the line $y = x$.

अथवा/OR

(क) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}$ जहाँ m धनात्मक वास्तविक संख्या है।

Prove that : $\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}$ where m is a positive real number.

(ख) समाकल $\int_0^{2a} \int_{\sqrt{29x-x^2}}^{\sqrt{2ax}} V dx dy$ के क्रम को परिवर्तित कीजिए।

Change the order of integration : $\int_0^{2a} \int_{\sqrt{29x-x^2}}^{\sqrt{2ax}} V dx dy$